

Title	一ツノ抽象積分ニ就テ
Author(s)	河田, 敬義
Citation	全国紙上数学談話会. 210 p.63-p.75
Issue Date	1941-02-26
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74838
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

908. ツノ抽象積分 = 就テ

河 田 敬 義 (東大)

確率論デ *stochastic process* フ取扱フトキニ,
 Khintchine ハ任意ノ *parameter* t ($0 \leq t \leq 1$)
 フ有スル確率変數 $\{x_t\}$ カラ, 無難作ニソノ積分
 $\int_0^1 x_t dt$, ソノ平均値ノ關係 $\overline{\int_0^1 x_t dt} = \int_0^1 \bar{x}_t dt$ 等ヲ
 用ヒタ。(Korrelations-theorie der stationäre
stochastische Prozesse, Math. Ann. 108).

Doob ハ之レ等ノ議論ガ全ク一般ニハ成立シナイコ
 ト, 其レガ許サレルノハ $\{x_t\}$ ガ所謂 *measurable*
stochastic process ノ場合ニ限ルコトヲ主張シタ。
 此処デハ全ク別ノ立場カラ, 直接ニアル確率ノ場ニ於ケル
 確率変數ノ空間 (即チ S -空間) フ考ヘテ, 其処デノ積分
 フ抽象的ニ取扱ツテ見タイト思ヒマス。

確率論ノ場合ト直接ニ關係スルヤウニ公理等ヲ選ビマシ
 タノデ, S 空間ノ値ヲ取ル積分トシテハ、マヅイモノニナッ
 テ終ヒマシタ。皆様ノ御教示ヲオ願ヒ致シマス。(以下
 G. Birkhoff: *Theory of Lattice* フLトシテ
 引用シマス。)

§ 1

先ヅ L フ σ -complete vector lattice (L ,
 p. 105) トスル。即チ

1) L ハ real. linear space \mathcal{F} , partially

order が與へられテキテ, $\forall e > 0$ lattice
ヲ作り.

$$2) \quad \mathcal{L} \ni f \geq 0, \lambda \geq 0 (\lambda: \text{real number}) \rightarrow \lambda f \geq 0.$$

$$3) \quad f \geq 0, g \geq 0 \rightarrow f + g \geq 0.$$

$$4) \quad \text{一般} = f \geq g \wedge f - g \geq 0 \text{ ト等値.}$$

次 = \mathcal{L} ハ單位元 $e > 0$ ヲ含ムトスル。即チ

$$5) \quad \text{任意} \quad \mathcal{L} \ni a > 0 \Rightarrow \exists e > 0 \quad e \wedge a > 0$$

以上カヲ直チ $x^+ = x \wedge 0, x^- = (-x) \wedge 0$ トス
レバ, $x = x^+ - x^-$. 又 $|x| = x^+ + x^-$ ト定メレバ,

$$|\lambda x| = |\lambda| |x|, |x + y| \leq |x| + |y|.$$

又, n ヲ自然數トスルトキ $x^{(n)} = x \wedge n e$ ト置ケバ

5) 性質カラ

$$\theta\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = x$$

$\hookrightarrow = \theta\text{-}\lim$ ハ order topology = ヨル極限
(L. p. 112) ヲ示ス。

Def. $\mathcal{L} \ni x$ が e -bounded トハ適當ナ N (自
然數) = 對シテ $|x| \leq N e$ ナルコトヲ云フ。

Axiom I. e -bounded ナ元 x = 對シテハ実平
均値 \overline{x} が定マリ, x, y 共 = e -bounded ナルトキハ

$$\begin{cases} \overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}, \\ \overline{\lambda x} = \lambda \cdot \overline{x} \\ x \geq y \rightarrow \overline{x} \geq \overline{y} \end{cases}$$

ヲ満足スル ε ノトスル。

Axiom II. $\mathcal{L} \ni x_n \geq 0$ がスベテ ε -bounded
デ且ツ $n = \infty$ まで単調増加デアルトスル。

若シ $\{x_n\}$ が bounded デナイナラバ (即チス
ベテノ $n = \infty$ まで $x_n \leq a$ +ル $a \in \mathcal{L}$ が存在シナイナ
ラバ)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{x_n} = \infty.$$

(注意) Axiom II ハ余リ面白い條件デハナイ。若シモ
Axiom I デ, $x > y$ ナラバ $\overline{x} > \overline{y}$ ト條件ヲ強メテオクナラ
バ, Axiom II ハ所謂 "vollkommen" +ル條件 ($\mathcal{L} \ni a_n$,
 $|a_n| \wedge |a_m| = 0$, $n \neq m$ ナラバ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が存在スル) カ
ラ得ラレル。

§ 2

\mathcal{L} ノ部分空間 \mathcal{L}_1 7, $\mathcal{L}_1 \ni x = x_+ - x_-$ が

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{x_{\pm} \wedge ne}) < \infty$$

+ル全体トスル。其ノトキ $\overline{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{x_+ \wedge ne}) - \lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{x_- \wedge ne})$ ト置ク。

(i) \mathcal{L}_1 ハ linear subspace トナリ, $x \mapsto \overline{x}$ ハ
positive linear functional トナル。

(証) $\mathcal{L}_1 \ni x, y \geq 0$ トスルバ

$$\begin{aligned} (x+y) \wedge ne &\leq (x \wedge ne) + (y \wedge ne) \leq (x+y) \wedge 2ne, \\ \overline{(x+y) \wedge ne} &\leq \overline{(x \wedge ne)} + \overline{(y \wedge ne)} \leq \overline{(x+y) \wedge 2ne} \end{aligned}$$

カテ $x+y \in \mathcal{L}_1$, $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$ フ得ル。入 x ノトキモ同様。

(ii) \mathcal{L}_1 デハ $x > y$ フラバ $\overline{x} > \overline{y}$ トナル。

(証) $x - y$ フ考ヘレバ, $x > 0$ ノトキ $\overline{x} = 0$ カテ矛盾ヲ導ケバヨイ。

$x \cap e = x$, トオケバ, $x_i > 0$ デ且ツ $0 = \overline{x} \geq \overline{x_i}$, ≥ 0 カテ $\overline{x_i} = 0$. シカル $= m x_i$ ($m = 1, 2, \dots$) ハ unbounded (L. p. 106, Theo. 7.3). コレハ Axiom II = 反スル。

(iii) Axiom II ハ $\mathcal{L}_1 \ni x_n \geq 0$ = 對シテモ成立スル。

(証) $\Delta x_n \leq x_{n+1}$, $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{x_n} < \infty$ トスル。
 $x_n \cap Ne = x_n^{(N)}$ トスレバ, $\{x_n^{(N)}\}$ ハ N フ固定スレバ Axiom II 1 條件ヲ充ス。故 $= \sigma\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(N)} = x^{(N)}$ が存在スル。勿論 $x^{(N)} \leq Ne$ デ, $\overline{x^{(N)}} \leq a$. 故 $= \{x^{(N)}\}$ フ考ヘレバ, Δ Axiom II カテ $\sigma\text{-}\lim_{N \rightarrow \infty} x^{(N)} = x$ が存在スル。シカル $= x_{n_n}^{(N)} \leq x^{(N)} \leq x$ ナル故 $N \rightarrow \infty$ トスレバ $x_n \leq x$ トナル。コレが求タル結果デアッタ。

(iv) $\mathcal{L}_1 \ni x$ = 對シテ $\|x\| = |\overline{x}|$ トオケバ, $\|x\|$ ハ norm 1 性質ヲ満足スル:

$$(i) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

$$(ii) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|,$$

$$(iii) \quad \|x\| = 0 \text{ フラバ, } x = 0.$$

(v) \mathcal{L}_1 ハ (iv) = 於ケル norm = \exists Banach space

トナル。

(証) \mathcal{L}_1 completeナルコトヲ言ヘサヘスレバヨ
イ。 $\mathcal{L}_1 \ni x_n$ が $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|x_m - x_n\| = 0$ ヲ満足スルモノ
トナル。 $n(k) \neq m, n \geq n(k) + 1$ バ $\|x_m - x_n\| \leq \frac{1}{k^3}$
ナル如クトレバ

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \overline{|x_{n(k)} - x_{n(k+1)}|} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

ナル故, (iii) カラ $\sum_{k=1}^{\infty} k |x_{n(k)} - x_{n(k+1)}| = u \in \mathcal{L}_1$ が存

在スル。故 $|x_{n(k)} - x_{n(k+1)}| \leq \frac{1}{k} u$ カラ (L.P. 112)
カラ $\sigma\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n(k)} = x$ が存在シ, 之レカラ $n\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n(k)} = x$,
従ツテ $n\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ トナル。 (コ $\Rightarrow n\text{-}\lim$
ハ norm topology = ヨル \lim ヲ示ス)

(vi) $\mathcal{L}_1 \ni x_n$ 対シテ $n\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ナルコトヲ,

$\|x_n\| < C$ シテ $\sigma^*\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ナルコトヲハ equivalent

ナル。

(此処 $\sigma^*\text{-}\lim$ ハ order topology = 對スル star topology ヲ意味スル (L.P. 29)).

(証) 前者カラ後者ノ出ルコトハ (v) ノトキト同様。後
半ハ $x_n \geq 0, x = 0$ トシテモ一般性ヲ失ハナイ。即チ
 $\sigma^*\text{-}\lim x_n = 0, \overline{x_n} < C$ カラ $\overline{x_n} \rightarrow 0$ ヲ証明スレバ
ヨイ。今 $\overline{x_{n(k)}} > \varepsilon > 0$ ナリトスレバ, $\overline{x_{n(k)}}$ 中基本
列ヲ選ベバ,

(v) カラ $n - \lim_{r \rightarrow \infty} x_{n(t(r))} = x \in L_1, \bar{x} = \lim_{r \rightarrow \infty} \overline{x_{n(t(r))}} > \varepsilon$

トナリ, 前半カラ $0 - \lim_{r \rightarrow \infty} x_{n(t(r))} = x \neq 0$ トナリ矛盾

トナル。

特 $= Ne \geq x_n \geq -Ne$ ナル $x_n =$ 對シテハ θ^* topology
ト norm top. トハ一致スル。

§.3

$[0, 1] = X_1$ 上, L_1 値ヲ取ル函数 $f(t)$ ヲ考ヘル。

(定義) measurable function 1 class \mathcal{M}
ヲ次ノ性質ヲ有スル最小ノ class トスル。

1) \mathcal{M} ハ Const. ヲ含ム。

2) $f_1, f_2 \in \mathcal{M}$ ナラバ $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in \mathcal{M}$ (α_1, α_2 ハ
實數)

3) $f \in \mathcal{M}$, 且ツ $\alpha(t)$ ヲ real measurable
function トスレバ $\alpha(t)f(t) \in \mathcal{M}$ 。

4) $f_n(t) \in \mathcal{M}$ デ且ツ t ノ almost everywhere
デ $\theta^* \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$ ナラバ $f(t) \in \mathcal{M}$ 。

(vii) $f(t) = f_+(t) - f_-(t)$ ト non-negative
function ノ差ニ分ケ, $f_{\pm}^{(n)}(t) = f_{\pm}(t) \wedge ne$ トス
レバ, $f(t)$ ガ上ノ定義デ measurable ナルタメノ必要
十分條件ハ $f_{\pm}^{(n)}(t)$ ガ L_1 = 於テ Bochner ノ意味デ
measurable ナルコトデアル。

(証) $0 \leq f(t) \leq Ne$ ナル範囲デハ, 先ヅ有限値函数
ガ \mathcal{M} = 属シ, 従ッテソノ $\theta^* \lim \in \mathcal{M}$ = 属スル。(vi) カ

O^* \lim と $norm \lim$ とは一一致スルカラ, コノ範囲デハ有限値函数 \lim とナル $f(t)$ 丈デ 4)ヲ満足スル。

$f_+(t) = O - \lim_{n \rightarrow \infty} f_+^{(n)}(t)$ ナル故, $f_+^{(n)}(t)$ が

Bochnerノ意味デ measurable ナラバ, $f_+(t) \in \mathcal{M}$ ニ属サテハナリ。

逆ニカナル $f(t)$ ノ class カ1) - 4)ヲ満足スルコトヲ証明シマシ。

先ヅ $\mathcal{M} \ni f_1, f_2 \geq 0$ トスレバ,

$$(f_1 + f_2) \cap ne = \{(f_1 \cap ne) + (f_2 \cap ne)\} \cap ne$$

ナル故, ($0 \leq f \leq ne$ ナル範囲デハ $f(t) \in \mathcal{M}$ ナラバ

$f(t) \cap f_0$ (f_0 ハ Const.) ハ又 \mathcal{M} ニ属スル故) 2)ノ成立スルコトガワカル。

※ = 4) ハ $f_n(t) \xrightarrow{O^*} f(t)$, $f_n(t) \in \mathcal{M}$ トスレバ $f_n^{(r)}(t) \xrightarrow{O^*} f^{(r)}(t)$, 即チ Bochnerノ方法デ (*) $f^{(r)}(t)$, 又 measurable トナリ, $f(t) \in \mathcal{M}$ トナル。

他モ同様。

(viii) $f_1, f_2 \in \mathcal{M}$ ナラバ $f_1 \cup f_2, f_1 \cap f_2 \in \mathcal{M}$.

(ix) $\mathcal{M} \cap \mathcal{L}$, ハ \mathcal{L} ノ内ニ於ケル Bochnerノ意味ノ measurable ト一致スル。

(証) $\mathcal{L} \ni f \geq 0$ トスレバ $\|f(t)\| \geq \|f(t) \cap ne\|$ ナル故,

$$O^* - \lim_{n \rightarrow \infty} f(t) \cap ne = f(t) \text{ カラ, (vi) ヲリ}$$

$f(t) = n - \lim_{n \rightarrow \infty} f(t) \cap ne$ トナリ Bochnerノ意味デ

$f(t)$ が measurable トナル。

§ 4

$\mathcal{M} = \mathcal{M}$, subspace \mathcal{J} が次の条件を満足する
maximal class として定まる。

1) \mathcal{J} は $f(t)$, A は X_1 の Lebesgue measurable set として $\int_A f(t) dt \in \mathcal{L}$ が定まり

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = A, \quad A_n \cap A_m = \emptyset, \quad (n \neq m)$$

ならば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(t) dt = \int_A f(t) dt$$

2) $f_1(t), f_2(t) \in \mathcal{J}$ ならば $\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \in \mathcal{J}$ となり (α_1, α_2 は実数)

$$\int_A (\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)) dt$$

$$= \alpha_1 \int_A f_1(t) dt + \alpha_2 \int_A f_2(t) dt$$

3) $f(t) = f_0 = \text{const.} \in \mathcal{J}$ ならば

$$\int_A f_0 dt = m(A) \cdot f_0$$

4) $f_n(t) \in \mathcal{J}$, $\exists f(t) \in \mathcal{J}$ して $|f_n(t)| \leq f(t)$,

参考文献 (米) S. Bochner, Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind. Fund. Math. 20 (1933)

$$\sigma^* \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f_0(t) + \text{ラベ}, f_0(t) \in \mathcal{J} \text{ ト + } \mathcal{J}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(t) dt = \int_A f_0(t) dt.$$

$$5) f(t) \in \mathcal{J} + \text{ラベ} \mid f(t) \in \mathcal{J}.$$

(X) $f(t) = f_+(t) - f_-(t)$, $f_{\pm}^{(n)}(t) = f_{\pm}(t) \wedge n$ re
トスレバ $f \in \mathcal{J} + \text{ラベ}$ ノ 必要 + 条件ハ $f_{\pm}^{(r)}(t)$ が \mathcal{L}_1 ノ
値ヲトル Bochner ノ 意味ノ measurable function
トシテ integrable デ, 且ツ

$$\sigma^* \lim_{r \rightarrow \infty} \int_A f_{\pm}^{(r)}(t) = x_{\pm}$$

が存在スルコトデアル。

$$\text{コノ時 } \int_A f(t) dt = x_+ - x_- \text{ ト + } \mathcal{J}.$$

(証) 5) カラ $f(t) \geq 0$ トシテ一般性ヲ失ハナイ。 $f^{(r)}(t)$
ハ $\|f^{(r)}(t)\| \leq r$ カラ measurable + ラベ必ズ inte-
grable デ, コノ範囲デ 1) — 5) ヲ満足スル。

故ニ $\int_A f(t) dt$ が定義サレ得ル+ラベ, 今ノ方法ヨ
リ仕方がナイ。 逆ニコノ様ニ \mathcal{J} ノ範囲ヲ定メタトキニ
1) — 5) ノ満足スルコトヲ証明シヤウ。

1) 2) 3) 5) ハ問題ハナイ。 4) ノ証明。 $f_n(t) \geq 0$,
 $f_n(t) \xrightarrow{\sigma^*} f_0(t)$, $f_n(t) \leq f(t) \in \mathcal{J}$ トスル。
 $\int_A f_n^{(r)}(t) dt = I_n^{(r)}$ ($n = 0, 1, \dots$) トスル。

$$(\text{コノ } f_n^{(r)}(t) = f_n(t) \wedge r \text{ トスル})$$

$$\int_A f^{(r)}(t) dt = I, \int_A f_n(t) dt = I_n, \int_A f(t) dt = I$$

トオク。 $f_n^{(r)}(t)$, 積分ハ Bochner / 意味 / 積分デアルカラ

$$O^* \lim_{n \rightarrow \infty} I_n^{(r)} = I_0^{(r)},$$

又定義カラ $O \lim_{r \rightarrow \infty} I_n^{(r)} = I_n$ 及 $O \lim_{r \rightarrow \infty} I^{(r)} = I$ デアル。

$$\begin{array}{ccc} I_n & & I_0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ I_n^{(r)} & \longrightarrow & I_0^{(r)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{サテ} \\ I - I_0^{(r)} \geq I_n - I_n^{(r)} \quad (n=0, 1, \dots) \\ \text{デアルカラ (vi) ヨリ} \\ 0 \leq I_n - I_n^{(r)} \leq w_n, w_n \downarrow 0 \\ \text{ナル } \mathcal{L} / \text{元 } w_n \text{ カアル。} \end{array}$$

一方 $I_n^{(r)}, I_0^{(r)}$ ハ \mathcal{L}_1 = 属スル故 (vi) カラ

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} k / |I_0^{(k)} - I_{n(k)}^{(k)}|$$

カ \mathcal{L}_1 = 属スルヌ $y = n(k)$ ヲ選ブコトカ出来ル。

$$\begin{aligned} \text{即チ } |I_0 - I_{n(k)}| &\leq |I_0 - I_0^{(k)}| + |I_0^{(k)} - I_{n(k)}^{(k)}| \\ &+ |I_{n(k)} - I_{n(k)}^{(k)}| \leq 2w_n + \frac{u}{k} \downarrow 0 \text{ トナリ,} \end{aligned}$$

$O - \lim_{k \rightarrow \infty} I_{n(k)} = I$ トナル。 即チモトメル関係式ヲ得タ。 ———

(xi) $f(t) \in \mathcal{L}_1$ (for almost every t) ナラバ

$\int_A f(t) dt$ ハ Bochner / 積分トナリ

$$\int_A \overline{f(t)} dt = \overline{\int_A f(t) dt}$$

ヲ満足スル。

(Xii) $f(t) \in \mathcal{J}$ デ $\int_0^t f(t) dt \in \mathcal{L}_1$ ナラバ $f(t)$ ハ almost every t デ \mathcal{L}_1 = 属スル。

コレ等ノ証明ハ別ニムツカシイコトハナイ。

(Xiii) $f(t) \in \mathcal{L}_1$ (for every t) デ $f(t) \in \mathcal{J}$ デモ必ずしも Bochner ノ意味デ integrable トハ限ラナイ。(例ヲ後ニ挙ゲル)

§ 5

\mathcal{L} = 於ケル σ^* topology が metric topology = ナル場合ニハ measurable function, class \mathcal{M} ハ次ノ如ク定メラレル。

(Xiv) $\mathcal{M} \ni f(t)$ ハ適當ナル有限値函数

$$f_n(t) = \sum_{r=1}^{N_n} f_r^{(n)} \chi(A_r^{(n)})$$

$$(\mathcal{O} = \chi_r = \sum_{r=1}^{N_n} A_r^{(n)}, A_r^{(n)} \cap A_s^{(n)} = \emptyset (r \neq s), \chi \text{ ハ}$$

χ ノ特性函数, $f_r^{(n)} \in \mathcal{L}$) , σ^* -limit トシテア
ラハサレル。

コレハ更ニ一般ニ

(Xv) \mathcal{X}_1 ノ上ノアル metric space S ノ値ヲトル
函数 $f(t)$ ヲ考ヘル。ソノ中デ有限値函数ノ極限トナル
class ヲ \mathcal{M} トスレバ, \mathcal{M} = 属スル $f_n(t)$ ノ極限函
数ニ亦 \mathcal{M} = 属スル。

コノ証明ハ Bochner ノ証明ヲ少シカヘレバヨイ。

次 = 微分トノ関係ハ

(Xvii) $\int_0^t f(t) dt$ ハ殆ンド致ル処ニ微分可能デ、ソ

ノ値ハ $f(t) = \text{等シイ}$ 。

又不定積分ハ *absolutely continuous* デアル
ガ、逆ハ必ずしも真デハナイ。

§ 6

L -space $\rightarrow [0, 1]$ 上ノ measurable function
ノ equivalent + class ノ作ル space トシ、
order, 平均値ヲ普通ノ意味ニトル。 α^* -convergence
ハ asymptotic convergence \rightarrow 意味シ、 L ハ
 S -space トナル。

ニ変数 x, y ($0 \leq x, y \leq 1$) ノ函数 $f(x, y)$ ガス
ベテ $x = \text{ツイテ}$, x \rightarrow 固定シタトキ $=$, y \rightarrow measurable
function デアレバ、ソレハ L space ノ値ヲ
トル X_1 ノ函数ヲ定メル。若レモ $f(x, y)$ ガニ変数ニ関シ
テ measurable + ラバ §3 ノ意味デ measurable
トナリ、逆ニ $f(x, y)$ カラ定メラル函数ガ §3 ノ意味デ
measurable + ラバ適當ト $x, y = \text{ツイテ}$ \rightarrow measur-
able function $f_1(x, y)$ \rightarrow 選ンデ、
 $m_y(f(x, y) \neq f_1(x, y)) = 0$ for every x
トスルコトが出来ル。

次ニニ変数 x, y ニ関シテ measurable + $f(x,$
 $y)$ カラ定メラレル L ノ値ヲトル函数 $ff(x)$ ガ integrable

x 対して y を固定すれば $f(x, y)$ は x に関して Lebesgue-integrable となること、一致し
 且つ、 y に対して $\int f(x, y) dx = \int f(x, y) dx$ となる。 $f(x, y)$ が Bochner の意味で integrable ならば $f(x, y)$ が
 二変数として integrable となることであるから、 x 及
 び y を夫々固定すれば integrable となる、二変数と
 して integrable であり $f(x, y)$ となれば (Xiii) の
 例となる。又 (Xvi) の例として Clarkson の等式
 の例を考へればよい。

$$\text{即ち } f(x, y) = \begin{cases} 0, & x > y \\ 1, & x \leq y \end{cases} \quad \text{とすればこれを定義して } f(x)$$

は absolutely continuous であり微分可能であるが
 その値はすべて 0 となり、 $f(t)$ は不定積分 = 0 となる。